Solutions du bac 2012

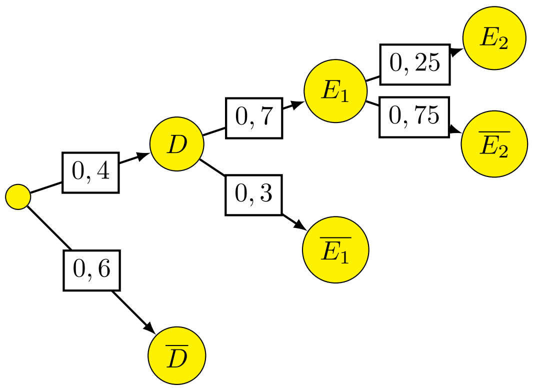
I)

x	-3		-1		0		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	1	$+$	0
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	-1	$\nearrow$	

1. Vrai
2. Vrai
3. Faux :
   f strictement croissante sur $[-1;2]$, $f(0) = -1$, donc $f(x) < -1$ pour $x \in [-1;0[$
4. Vrai
   $f'(0) = 1$, $f(0) = -1$, tangente $y = x - 1$

II)

1. a)



   b) $P(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$

   c) $P(E_2) = 0,28 \times 0,25 = 0,07$
   $P(\overline{E_2}) = 0,93$

2. a) L'étude d'un dossier est une expérience à deux issues, succès ou échec.
   La probabilité d'un succès est $p = 0,07$
   On répète 5 fois cette expérience, de manière indépendante.
   X est le nombre total de succès.
   Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,07$

   b) $P(X = 2) = \binom{5}{2} p^2(1-p)^3 = 10 \times (0,07)^2 \times (0,93)^3 \approx 0,039$

3. Il faut choisir n tel que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,999$
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n = 1 - (0,93)^n$
   On résout $1 - (0,93)^n \geqslant 0,999$, soit $(0,93)^n \leqslant 0,001$
   Cela équivaut à : $n \ln(0,93) \leqslant \ln(0,001)$
   Tout le monde a bien sûr vu l'énorme piège : $0,93 < 1$, donc $\ln(0,93) < 0$ (ha, ha)
   Donc le problème équivaut à $n \geqslant \dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,93)} \approx 95,187$.
   En nombres entiers : $n \geqslant 96$

III)

Tout le monde aura bien sûr reconnu le thème de l'exercice 9 de la feuille "Intégrales, thèmes de bac récents" (le titre aurait donc pu être "thèmes de bac récents et futurs"). La solution donnée sur le site suit en gros le schéma suivi ici.

A

1. $0 + \ln(1) = 0$
2. $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
3. $f(x) < 0$ (tableau de variations)

B

L'algorithme calcule $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

1. $\frac{11}{6}$
2. On remplace l'instruction de sortie par :
   Afficher $u-\ln(n)$
3. La suite semble décroissante et minorée par 0, donc convergente.

C

1. $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}+\ln(n)-\ln(n+1)=f(n)$
2. **a)** Pour $x \geqslant k$, $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$, donc $\frac{1}{k}-\frac{1}{x} \geqslant 0$

   Donc par positivité de l'intégrale (avec $k<k+1$), $\int_k^{k+1} \frac{1}{k}-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ est positive.
   On sépare l'intégrale en deux par linéarité, on calcule la deuxième intégrale, on en déduit
   $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x$, d'où après calcul : $\ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$

   b) $(\ln(2)-\ln(1))+(\ln(3)-\ln(2))+\cdots+(\ln(n+1)-\ln(n)) \leqslant \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$
   On en déduit $\ln(n+1) \leqslant \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

   c) On en déduit $u_n \geqslant 0$
3. u est décroissante et minorée par 0, donc converge vers une limite $L \geqslant 0$.
   Tout le monde aura bien sûr reconnu que L est la constante d'Euler-Mascheroni $L=\gamma \approx 0,57721$ comme le suggéraient évidemment les valeurs fournies par l'algorithme.

IV) Spécialité

1. Les coordonnées des points vérifient l'équation de la droite
2. $z=\frac{-3+i}{1+i}=-1+2i$
   Ses coordonnées ne vérifient pas l'équation de la droite.
3. **a)** $z'=az+b$: similitude directe
   rapport $|a|=\sqrt{2}$, angle $\arg(a)=\frac{\pi}{4}$
   L'affixe du centre est $\frac{b}{1-a}=-1+2i$

   b) $a_1=1-i, \quad b_1=1+i, \quad c_1=1+3i=c$

   c) L'image d'une droite est une droite, donc l'image de (AB) est (A_1B_1), qui a pour équation $x=1$
4. **a)** Les affixes des images de A_1, B_1, C_1 par h sont
   $\frac{1}{2}+\frac{i}{2} \qquad \frac{1}{2}-\frac{i}{2} \qquad \frac{1}{10}-\frac{3i}{10}$

   b) $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2-z}{2z}\right|=\frac{|2-z|}{|2z|}=\frac{|2-z|}{2|z|}=\frac{|z-2|}{2|z|}$
   On en déduit l'équivalence demandée

   c) Soit un point M d'affixe z appartenant à D_1. Comme D_1 est la médiatrice de $[OO']$ avec O' d'affixe 2, on a $MO=MO'$ et donc $|z-2|=|z-0|$.
   Donc d'après ce qui précède $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$
   Soit M_2 d'affixe $z_2=\frac{1}{z}$. Alors $\left|z_2-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, donc $IM_2=\frac{1}{2}$, avec I d'affixe $\frac{1}{2}$
   Donc M_2 est sur le cercle de centre I d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$

   d) Réciproquement si un point M_2, distinct de O, appartient au cercle, alors en posant $z=\frac{1}{z_2}$, on a $z_2=\frac{1}{z}$, et donc M_2 est l'image du point M d'affixe z par h, et d'après l'équivalence du 4.b , $M \in D_1$
5. $f=h\circ g$
   Donc $f(D)=h(g(D))=h(D_1)$.
   C'est le cercle précédent privé de O d'après ce qui précède.