Solutions du contrôle n°2

I) 3 points

1. En multipliant par $z-2$ et en regroupant les termes, on obtient une équation du premier degré : $z(1-i)=-2i$.

Donc $z=\dfrac{-2i}{1-i}=\boxed{1-i}$. Donc un point solution : $(1;-1)$

2. Voir "Complexes : exemples. Forme algébrique, calculs, conjugués", exemple III.6

Z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{Z}=-Z$.

On écrit la formule de $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$ (on utilise les règles de calcul sur les conjugués). On trouve $\overline{Z}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z}-2}$.

On traduit ensuite $\overline{Z}=-Z$, en écrivant sous une forme sans dénominateur.

On trouve $z\overline{z}-z-\overline{z}=0$

Remarque : jusqu'à maintenant, on n'a pas remplacé z par $x+iy$. Tant qu'on peut avancer sans développer, on ne développe pas.

Maintenant on développe : $x^2+y^2-2x=0$

Avec ce type d'équation, on essaye de mettre sous la forme de l'équation d'un cercle.

On met sous forme canonique $(x-1)^2-1+y^2=0$, soit $(x-1)^2+y^2=1$.

Il faut savoir reconnaître l'équation du

$\boxed{\text{cercle de centre } (1;0) \text{ et de rayon } \sqrt{1}=1\text{, privé de } (2;0)}$.

Il faut enlever le point d'affixe 2 car le dénominateur de Z serait nul.

Il est prudent de vérifier. Vérifions la cohérence avec la question précédente : le point dont l'affixe est $1-i$ est bien sur le cercle.

II) 5 points

1. Voir "Complexes : exemples. Forme algébrique, calculs, conjugués", exemple III.2

On pose $z=x+yi$ avec x et y réels.

L'équation s'écrit :

$(x+yi)^2=-x+yi$

$\Leftrightarrow x^2+2yi+i^2y^2=-x+yi$

$\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=-x+yi$ car $i^2=-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-x \\ 2xy=y \end{cases}$

d'après le principe d'identification des parties réelles et des parties imaginaires.

En résolvant $(y(2x-1)=0)$, on trouve

$$\boxed{z=0 \text{ ou } z=-1 \text{ ou } z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ou } z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

2. **a)** $z^2+z=\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

Donc l'équation $z^2+z+1=0$ équivaut à $\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{3}{4}$.

Or $-\dfrac{3}{4}$ est le carré de $i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc l'équation équivaut à $z+\dfrac{1}{2}=i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z+\dfrac{1}{2}=-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions sont donc $\boxed{\left\{-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$

b) $(z-1)(z^2+z+1)=\cdots=z^3-1$

Donc l'équation $z^3=1$ équivaut à $z-1=0$ ou $z^2+z+1=0$. Les trois racines cubiques de 1 sont donc : $\{z_1;z_2;z_3\}$

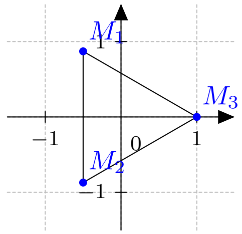
avec $z_1=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et $z_3=1$

Démontrons que la rotation de centre M_3 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ transforme M_1 en M_2 :

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+1=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1=-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}-i\frac{3\sqrt{3}}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}+1=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=z_2$$

Donc $\boxed{\text{le triangle } M_1M_2M_3 \text{ est équilatéral}}$.



III) 6 points

1. Voir "Complexes et géométrie : TICE", n°6

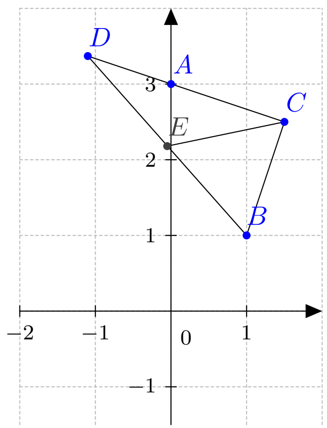
a) On trouve z_C en résolvant : $z_B = i(z_A - z_C) + z_C$.

On obtient $z_C = \dfrac{z_B - iz_A}{1-i} \cdots = \boxed{\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i}$

On trouve z_D avec la formule d'une homothétie :

$z_D = \sqrt{3}(z_A - z_C) + z_C = \cdots = \boxed{\dfrac{3-3\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}}$

Avec la formule du milieu : $z_E = \dfrac{z_B + z_D}{2} = \boxed{\dfrac{5-3\sqrt{3}}{4} + \dfrac{7+\sqrt{3}}{4}i}$



b) On démontre que $z_E - z_B = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z_C - z_B)$

$z_C - z_B = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$

$\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right) = \cdots = \dfrac{-3\sqrt{3}+1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}+3}{4}i$

Or $z_E - z_B = \dfrac{5-3\sqrt{3}}{4} + \dfrac{7+\sqrt{3}}{4}i - 1 - i = \dfrac{-3\sqrt{3}+1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}+3}{4}i$

Donc E est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Donc $\boxed{CBE \text{ est équilatéral}}$

2. **a)** D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = BC^2 - AB^2$

$\dfrac{AC^2}{AB^2} = \dfrac{BC^2}{AB^2} - 1$

Or $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{5}{4}$, donc $\dfrac{AC^2}{AB^2} = \dfrac{25}{16} - 1 = \dfrac{9}{16}$

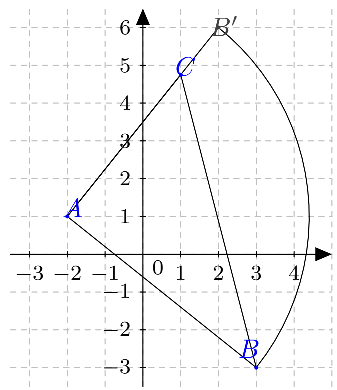
Donc $\boxed{k = \dfrac{3}{4}}$ (puisque $k \geqslant 0$)

b) Soit B' l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Alors C est l'image de B' par l'homothétie de centre A et de rapport $k = \dfrac{3}{4}$

Donc $b' - a = i(b-a)$ et $c - a = k(b'-a)$, donc $c - a = ki(b-a)$

$c = ki(3 - 3i + 2 - i) - 2 + i = \boxed{4k - 2 + i(5k+1) = 1 + \dfrac{19}{4}i}$



IV) 6 points

1. $f(z) = r \circ t(z) = r(t(z)) = i(z+i) = \boxed{iz - 1}$

$r \circ t(z') = i(z - i) - 1 = iz + 1 - 1 = z''$

Donc $\boxed{A'' = f(A').\text{ pour tout point } A \text{ du plan}}$.

$t \circ r(z) = iz + i$

2. Le coefficient de z est $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donc on conjecture que f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Pour le démontrer, on calcule le point invariant et on vérifie la formule d'une rotation.

Le point invariant est solution de $z = f(z)$, soit $z = iz - 1$.

C'est-à-dire $z(1-i) = -1$, soit $z = \frac{-1}{1-i} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \omega$.

On calcule l'image de z par la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$i(z-\omega) + \omega = i\left(z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \cdots = iz - 1$. C'est bien $f(z)$.

Donc $\boxed{f \text{ est la rotation de centre } \Omega \text{ d'affixe } \omega = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}}$

$t \circ r$ est la rotation de centre d'affixe $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

3. L'équation du cercle est $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, soit après calculs $x^2 + y^2 - y = 0$.

Vérifions que, si cette condition est vérifiée, alors O, A' et A'' sont alignés. Cela revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OA''}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe k réel tel que $z'' = kz'$, c'est-à-dire $iz = k(z-i)$, soit $i(x+iy) = k(x+iy-i)$. Par identification, cela revient à un système $\begin{cases} -y = kx \\ x = ky - k \end{cases}$

La première équation fournit une valeur de k : $k = -\frac{y}{x}$.

Donc il existera une solution k si et seulement si cette valeur est compatible avec la deuxième équation, c'est-à-dire si $x = -\frac{y}{x}y - \frac{y}{x}$

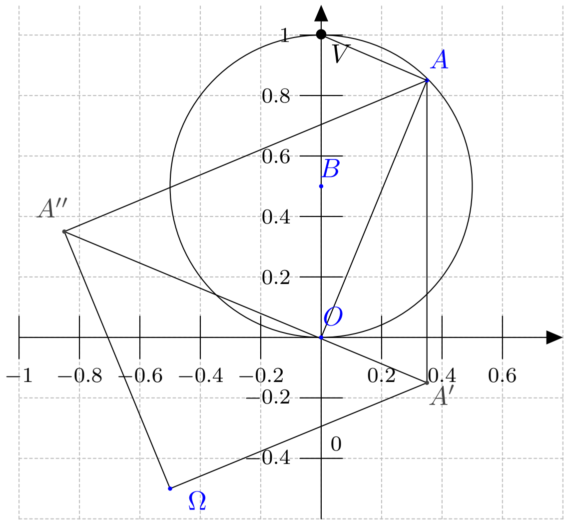
Cette équation s'écrit après calculs $x^2 + y^2 - y = 0$, ce qui est l'équation du cercle.
Donc k existe et $\boxed{O,\ A' \text{ et } A'' \text{ sont alignés}}$

• *Autre méthode, purement géométrique* :

Si A appartient au cercle de diamètre $[OV]$, alors $(OA) \perp (AV)$. Or $(OA'') \perp (OA)$, donc $(OA'')//(AV)$.

D'autre part $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{A'A}$ (translation de vecteur $\overrightarrow{OV}$), donc $OA'AV$ est un parallélogramme et donc $(OA')//(AV)$. Or on vient de démontrer que $(OA'')//(AV)$, donc $(OA'')//(OA')$ et donc O, A' et A'' sont alignés.

4.



On observe que le triangle $\Omega A'A''$ est rectangle isocèle en Ω, direct. C'est cohérent avec le résultat de la question 2 qui dit que $A'' = f(A')$ et que f est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On observe que A appartient au cercle de diamètre $[OV]$. C'est cohérent avec le résultat de la question 3 car on observe que O, A' et A'' sont alignés.

On peut vérifier avec les calculs (mais on ne le demandait pas forcément) :

La distance de A au centre du cercle est : $BA = \cdots = \frac{1}{2}$

$z' = \cdots = \frac{\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\right)$

$z'' = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{4}$

On vérifie $z'' = kz'$ avec $k = -\sqrt{2} - 1$