Spécialité : Solutions du Contrôle n°1

Durée : deux heures. Calculatrices autorisées

I) 4 points

Soit n un entier relatif.

1. $n^2+n+3-(n-1)^2=\cdots=3n+2$. Donc d'après le théorème de la combinaison linéaire (ou de la différence), a divise aussi $3n+2$

2. $3n+2-3(n-1)=5$

Donc par combinaison linéaire a divise 5.

Les diviseurs de 5 sont $\{-5;-1;1;5\}$

Donc si a divise $n-1$ et n^2+n+3, alors $a\in\{-5;-1;1;5\}$.

Mais il faut maintenant étudier une réciproque : quand ces valeurs sont-elles solutions ?

$a=1$ et $a=-1$ sont toujours solutions, puisque ces nombres divisent tous les autres.

$a=5$ ne peut être solution que si $n-1=5k$, soit $n=1+5k$.

Pour ces n, 5 divise $n-1$ et $n^2+n+3=1+10k+25k^2+1+5k+3=5(1+2k+5k^2)$, qui est bien multiple de 5.

De même pour $a=-5$

Si $n=1+5k$ alors les a solutions sont $\{-5,-1,1,5\}$. Sinon les a solutions sont $\{-1,1\}$.

II) 4 points

1. $(an+b)(n+1)=\cdots=an^2+(a+b)n+b$.

Une solution peut être obtenue par identification :

$$\begin{cases} a=4 \\ a+b=7 \\ b=3 \end{cases}$$

Donc $4n^2+7n+3=(4n+3)(n+1)$

2. $n+1$ divise $4n^2+7n+9$ si et seulement si le reste de $4n^2+7n+9$ par $n+1$ est 0.

Calculons ce reste :

puisque $4n^2+7n+9=4n^2+7n+3+6$, on a $4n^2+7n+9=(4n+3)(n+1)+6$.

Cela pourrait être la division euclidienne de $4n^2+7n+9$ par $n+1$, mais à condition que $0\leqslant 6<n+1$, soit $n>5$.

Dans ce cas, le reste est 6, non nul, donc $n+1$ ne divise pas $4n^2+7n+9$.

On examine les autres cas un par un :

n	0	1	2	3	4	5
$4n^2+7n+9$	0	20	39	66	101	144
$n+1$	1	2	3	4	5	6
reste	0	0	0	2	1	0

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\{0;1;2;5\}}$ dans $\mathbb{N}$

Mais en fait l'énoncé demandait de résoudre dans $\mathbb{Z}$

La propriété est équivalente à dire que $n+1$ divise 6, c'est-à-dire que $n+1\in\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$

Finalement l'ensemble des solutions est $\boxed{\{-7;-4;-3;-2;0;1;2;5;\}}$ dans $\mathbb{Z}$

III) 4 points

Questions indépendantes :

1. Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $2n+1$ divise $3n-4$ (former une combinaison linéaire pour éliminer n)

$3(2n+1)-2(3n-4)=\cdots=11$

Donc si $2n+1$ divise $3n-4$, alors par combinaison linéaire il divise 11.

Les diviseurs de 11 sont $\{-11;-1;1;11\}$, donc $2n+1$ est nécessairement à chercher parmi ces valeurs.

Réciproquement, on essaye chacune de ces valeurs :

$2n+1$	-11	-1	1	11
n	-6	-1	0	5
$3n-4$	-22	-7	-4	11
solution ?	*oui*	*oui*	*oui*	*oui*

2. $4^{n+1}-5=4^n\times 4-5$

Mais $-5<0$. Diminuons le facteur de 4^n :

$4^{n+1} - 5 = 4^n \times 3 + 4^n - 5$

Cette écriture n'est la division euclidienne que si $0 \leqslant 4^n - 5 < 4^n$.

$4^n - 5 < 4^n$ est toujours vraie.

Quand a-t-on $4^n \geqslant 5$? On sait que 4^n est croissante en fonction de n car $4 > 1$.

Or $4^1 < 5$ et $4^2 \geqslant 5$. Donc $4^n - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow n \geqslant 2$.

Donc $\boxed{\text{pour } n \geqslant 2\text{, le reste est } 4^n - 5}$

Il reste une valeur à essayer : $n = 1$.

$4^2 - 5 = 11$ et $4^1 = 4$, donc $\boxed{\text{pour } n = 1 \text{ le reste est } 3}$

IV) 4 points

1. On va faire un raisonnement par disjonction des cas, suivant le reste de n par 5.

   Ce reste r peut prendre 5 valeurs $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.

   Plutôt que de répéter des calculs similaires à chaque fois, commençons par un calcul général : posons $n = 5q + r$ (division euclidienne).

   Alors $n^2 - 2 = 25q^2 + 10qr + r^2 - 2$. Or $25q^2 + 10qr$ est divisible par 5, donc $n^2 - 2$ est divisible par 5 si et seulement si $r^2 - 2$ est divisible par 5.

   Maintenant on peut examiner chacun des cas pour r :

r	0	1	2	3	4
$r^2 - 2$	-2	-1	2	7	14

   On constate qu'aucune des valeurs de $r^2 - 2$ n'est divisible par 5, donc $n^2 - 2$ n'est jamais divisible par 5.

2. Si un nombre relatif d divise $4n^2 + 7$ et $n^2 + 3$, alors par combinaison linéaire il divise $4(n^2 + 3) - (4n^2 + 7) = 5$.

   Donc nécessairement d est un diviseur de 5 : $d \in \{-5; -1; 1; 5\}$

3. Si 5 divise $4n^2 + 7$ et $n^2 + 3$, alors il divise $4n^2 + 7 - 3(n^2 + 3) = n^2 - 2$.

   Or, d'après la question 1, $n^2 - 2$ n'est jamais divisible par 5, donc

   $\boxed{\text{il n'existe aucun } n \text{ tel que 5 divise } 4n^2 + 7 \text{ et } n^2 + 3}$

V) 4 points

Soit n un entier naturel et $x = (n^2 + (n - 1)^2)^2$.

1. D'après l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,

   $x - (2n - 1)^2 = (n^2 + (n - 1)^2 - (2n - 1))(n^2 + (n - 1)^2 + (2n - 1)) = \cdots = 4n^2(n^2 - 2n + 1)$.

   Donc $x - (2n - 1)^2$ est toujours divisible par $4n^2$.

2. D'après ce qui précède $x = 4n^2(n^2 - 2n + 1) + (2n - 1)^2$.

   A-t-on $0 \leqslant (2n - 1)^2 < 4n^2$?

   $0 \leqslant (2n - 1)^2$ est toujours vrai.

   Pour $n \geqslant 1$, on a $1 \leqslant 2n - 1 < 2n$, donc en élevant au carré (tout est positif) : $0 \leqslant (2n - 1)^2 < 4n^2$.

   Donc $\boxed{\text{le reste est toujours } (2n - 1)^2 \text{ pour } n \geqslant 1}$