ROC : suite croissante non majorée

1. On considère les deux suites u et v définies par : $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = (-1)^n\sqrt{n}$. Pour chacune de ces suites, peut-on dire qu'elles sont plus grandes que 100 à partir d'un certain rang ?

Quand a-t-on $u_n \geqslant 100$? $\sqrt{n} \geqslant 100$ équivaut à $n \geqslant 100^2$. Donc, oui, u est supérieure ou égale à 100 à partir du rang 10000, donc à « partir d'un certain rang », c'est-à-dire pour *tous* les n supérieurs ou égaux à une certaine valeur.

Quand a-t-on $v_n \geqslant 100$? Si n est pair, on peut avoir $v_n \geqslant 100$: il suffit d'avoir $n \geqslant 10000$. Si n est impair, $v_n = -\sqrt{n}$ et donc on ne peut pas avoir $v_n \geqslant 100$. Donc, non, on ne peut pas dire que v est supérieure ou égale à 100 à partir d'un certain rang, puisque, quel que soit le rang , même supérieur à 10000, il existera toujours un rang n supérieur tel que $v_n < 100$. La propriété « être supérieure ou égale à 100 » n'est donc jamais acquise définitivement pour v.

2. Les suites u et v sont-elles majorées ?

u et v peuvent toujours dépasser n'importe quel nombre M positif donné arbitrairement : pour avoir $u_n > M$ il suffit de choisir $n > M^2$, et pour avoir $v_n > M$ il suffit de choisir un n pair vérifiant $n > M^2$ (par exemple $2M^2$). Donc ni u ni v ne sont majorées.

3. Quels sont les sens de variation des suites u et v ?

u est croissante puisque la fonction racine carrée est croissante.

v n'est ni croissante ni décroissante, et elle ne devient jamais monotone à partir d'un certain rang, puisque pour n pair on a $u_{n+1} < u_n$ (car $-\sqrt{n+1} < \sqrt{n}$) et pour n impair on a $u_{n+1} > u_n$ (car $\sqrt{n+1} < -\sqrt{n}$). v oscille indéfiniment.

4. Démontrer en revenant à la définition que u a pour limite $+\infty$

Il faut démontrer une propriété du type : « pour tout M positif, ...» Donc la démonstration doit commencer par : « Soit M positif ».

Soit M positif. Essayons de montrer que u devient supérieure à M à partir d'un certain rang. On l'a démontré précédemment : il suffit de choisir $n > M^2$.

Donc, pour tout M positif, u devient supérieure à M à partir d'un certain rang. Donc d'après la définition d'une limite infinie, u a pour limite $+\infty$.

5. Démontrer que v n'a pas pour limite $+\infty$

On peut raisonner par l'absurde : si v avait pour limite $+\infty$, alors par exemple v dépasserait 100 (en particulier) à partir d'un certain rang. Or on a vu que ce n'était pas possible (même si v peut dépasser 100, elle ne reste jamais constamment supérieure à 100 ensuite). Donc v n'a pas pour limite $+\infty$.

Le choix particulier de la valeur 100 est arbitraire, c'est juste pour donner un contre-exemple et cela suffit.

6. Soit r la suite définie par $r_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Démontrer que r est croissante et majorée. Est-ce qu'elle tend vers $+\infty$?

On a $n+1 > n$, donc $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ (propriété des inverses de même signe), donc $-\dfrac{1}{n+1} > -\dfrac{1}{n}$ (propriété des opposés), donc $1 - \dfrac{1}{n+1} > 1 - \dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire $r_{n+1} > r_n$. Donc r est croissante.

r est majorée par 1 car $1 - \dfrac{1}{n} < 1$ puisque $-\dfrac{1}{n} < 0$.

La limite de r est 1 d'après les règles sur les limites. Donc r ne tend pas vers $+\infty$.

7. Soit s la suite définie par $s_n = n + 2(-1)^n$. Est-elle croissante ? majorée ?

s n'est pas croissante puisque $s_0 > s_1$ $(2 > -1)$ et elle n'est pas décroissante puisque $s_1 < s_2$ $(-1 < 4)$. Elle ne devient jamais monotone, même à partir d'un certain rang ($s_{n+1} - s_n = 1 + 2(-1)^{n+1} - 2(-1)^n = -3$ si n est pair et 5 si n est impair).

s n'est pas majorée puisque $s_n \geqslant n - 2$, donc, pour tout M, pour avoir $s_n > M$ il suffit de choisir $n > M + 2$, ce qui prouve également que la limite de s est $+\infty$, puisque s peut être rendue aussi grande qu'on veut à partir d'un certain rang.

8. Donner des exemples parmi les suites précédentes

Une suite peut être croissante et ne pas tendre vers $+\infty$: ...?

Une suite peut tendre vers $+\infty$ et ne pas être croissante : ...?

Une suite peut être non majorée et ne pas tendre vers $+\infty$: ...?

Une suite peut ne pas être majorée et ne pas être croissante : ...?

9. Démontrer qu'une suite majorée ne peut pas tendre vers $+\infty$

Si u est majorée par M alors il est impossible de trouver n tel que $u_n > M$, ce qui contredit la définition d'une limite $+\infty$.

10. Démontrer : toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$

Soit M quelconque. Puisque u n'est pas majorée il existe n tel que $u_n > M$, et puisque u est croissante alors elle dépassera M à partir de ce rang n.