PGCD (2) : règles de calcul, nombres premiers entre eux

I) Questions de cours

1. Si d divise a et b, alors d divise $\boxed{...?}$

   La réciproque est-elle vraie ? $\boxed{...?}$ Pourquoi ? $\boxed{...?}$

   Conclusion : l'ensemble des diviseurs communs à a et b est exactement l'ensemble des diviseurs de $\boxed{...?}$
2. Homogénéité (factorisation) : pour k non nul, $\text{PGCD}(ka, kb) = \boxed{...?}$
3. Calcul du PGCD à partir des facteurs premiers : la décomposition de $\text{PGCD}(a, b)$ en facteurs premiers s'obtient en faisant le produit des facteurs premiers communs à a et b, avec pour exposants $\boxed{...?}$
4. On dit que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $\text{PGCD}(a, b) = \boxed{...?}$

   Ne pas confondre avec : « a et b sont premiers » : quelles sont les relations d'implication vraies ou fausses entre les deux phrases : « a et b sont premiers entre eux » et « a et b sont premiers » ? $\boxed{...?}$
5. Théorème de réduction d'un PGCD : dire que $\text{PGCD}(a, b) = d$ signifie qu'il existe a' et b' premiers entre eux tels que $\boxed{...?}$ et $\boxed{...?}$
6. Avec les décompositions en facteurs premiers : a et b sont premiers entre eux si et seulement si $\boxed{...?}$

II) Exemples

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $\text{PGCD}(n^2 + 2n + 9, n + 2) = 3$

   On commence par simplifier le calcul de $\text{PGCD}(n^2 + 2n + 9, n + 2)$ à l'aide du lemme d'Euclide : $n^2 + 2n + 9 = n(n + 2) + 9$, donc d'après le lemme d'Euclide $\text{PGCD}(n^2+2n+9, n+2) = \text{PGCD}(n^2+2n+9-n(n+2), n+2) = \text{PGCD}(9, n+2)$.

   Le problème revient donc à résoudre $\text{PGCD}(9, n + 2) = 3$. Donc il faut déjà que $n + 2$ soit divisible par 3 (condition nécessaire : le PGCD est un diviseur commun particulier). Mais est-ce suffisant (le PGCD n'est pas n'importe quel diviseur commun, c'est le plus grand) ?

   Le problème revient à chercher $n+2$ sous la forme $n+2 = 3k$ et à déterminer les k qui conviennent. D'après une règle de factorisation $\text{PGCD}(9, 3k) = 3\text{PGCD}(3, k)$.

   Donc le problème revient à résoudre $3\text{PGCD}(3, k) = 9$, soit $\text{PGCD}(3, k) = 3$. D'après un théorème, c'est équivalent à dire que k est divisible par 3 : $k = 3m$.

   L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des n de la forme $-2+9m$ avec $m \in \mathbb{Z}$
2. Déterminer les n tels que $\text{PGCD}(n, 17640) = 126$

   On trouve $17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$.

   On vérifie déjà que 17640 est bien divisible par 126 (sinon il n'y aurait pas de solution) : $17640 = 126 \times 2^2 \times 5 \times 7$

   Nécessairement n est divisible par 126, avec $n = 126k$. Donc d'après un théorème de réduction, dire que $\text{PGCD}(n, 17640) = 126$ revient à dire que k et $2^2 \times 5 \times 7$ sont premiers entre eux, c'est-à-dire $\text{PGCD}(k, 2^2 \times 5 \times 7) = 1$. Donc les solutions sont tous les $n = 126k$, avec k non divisible par 2 ni par 5 ni par 7 (d'après le critère qui caractérise deux nombres premiers entre eux d'après leurs décompositions en facteurs premiers).
3. Soient a et b entiers naturels tels que $\text{PGCD}(a, b) = 21$.
   Démontrer que tout diviseur commun à $3a+5b$ et à $a+2b$ est aussi un diviseur commun à a et à b. En déduire l'ensemble des entiers naturels d supérieurs à 5 tels que d divise $3a + 5b$ et $a + 2b$

   Soit d un diviseur commun à $3a + 5b$ et à $a + 2b$. On effectue des combinaisons linéaires pour trouver a et b : $2(3a + 5b) - 5(a + 2b) = a$, donc d divise a.

   $3(a + 2b) - (3a + 5b) = b$, donc d divise b.

   Donc, d'après un théorème, d divise $\text{PGCD}(a, b)$, c'est-à-dire 21, dont la décomposition est 3×7. Donc $d \in \{1, 3, 7, 21\}$.

   Donc l'ensemble des d supérieurs à 5 est $\{7, 21\}$.
4. Déterminer $\text{PGCD}(2012^{2008}, 2008^{2012})$

   Facteurs premiers : $2012 = 2^2 \times 503$ et $2008 = 2^3 \times 251$ (à vérifier).

   Le seul facteur commun est 2, donc le PGCD cherché est 2^x avec x le plus petit des deux nombres 2×2008 et 3×2012, c'est-à-dire $2 \times 2008 = 4016$.

   Donc $\text{PGCD}(2012^{2008}, 2008^{2012}) = 2^{4016}$
5. Déterminer a et b positifs tels que $a \leqslant b$ et $\text{PGCD}(a, b) = 7$ et $a + b = 42$

   Le problème équivaut à $a = 7a'$; $b = 7b'$; $\text{PGCD}(a', b') = 1$; $a' \leqslant b'$ et $a' + b' = 6$.

   On examine tous les cas pour $a' + b' = 6$, on trouve finalement $a = 7$ et $b = 35$