# Récurrence : exemples

## I

**1.** Soit $u$ une suite croissante. Démontrer par récurrence que $u_n \geqslant u_0$ pour tout $n$.

**Initialisation** : $u_0 \geqslant u_0$.

**Hérédité** : Soit un indice $n$ tel que $u_n \geqslant u_0$. Comparons $u_{n+1}$ à $u_0$. $u_{n+1} \geqslant u_n$ puisque $u$ est croissante. Or $u_n \geqslant u_0$, donc par transitivité $u_{n+1} \geqslant u_0$. La propriété est donc bien héréditaire.

Donc d'après le principe de récurrence, $u_n \geqslant u_0$ pour tout $n$.

**2.** Soit $u$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$. Démontrer par récurrence que $u$ est minorée par 1.

**Initialisation** $u_0 \geqslant 1$ : vrai puisque $2 \geqslant 1$.

**Hérédité** Soit un indice $n$ tel que $u_n \geqslant 1$. Alors $u_n + 1 \geqslant 2$ et $\dfrac{u_n + 1}{2} \geqslant 1$. Donc $u_{n+1} \geqslant 1$ : la propriété est héréditaire.

Donc, d'après le principe de récurrence, $u_n \geqslant 1$ pour tout $n$ et donc $u$ est minorée par 1.

**3.** Soit $u$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$. Démontrer par récurrence que $u$ est décroissante.

La propriété de récurrence est $P(n) : u_n \geqslant u_{n+1}$.

**Initialisation** $u_0 \geqslant u_1$ : vrai puisque $u_0 = 2$ et $u_1 = \dfrac{3}{2}$

**Hérédité** Soit un indice $n$ tel que $u_n \geqslant u_{n+1}$. Alors $u_n + 1 \geqslant u_{n+1} + 1$ et $\dfrac{u_n + 1}{2} \geqslant \dfrac{u_{n+1} + 1}{2}$. Donc $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$ : la propriété est héréditaire.

Donc, d'après le principe de récurrence, $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout $n$ et donc $u$ est décroissante.

**4.** Soit $u$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{5}(x^3 + 1)$. Démontrer par récurrence que $u$ est minorée par 0 et majorée par 1. On admettra qu'on peut démontrer que $f$ est croissante.

**Initialisation** $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$ : vrai puisque $u_0 = 1$

**Hérédité** Soit un indice $n$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
En appliquant $f$ : $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$, car $f$ est croissante. Comme de plus $0 \leqslant f(0) \leqslant f(1) \leqslant 1$, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Donc la propriété est héréditaire.

Donc, d'après le principe de récurrence, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n$ et donc $u$ est minorée par 0 et majorée par 1.

**5.** Soit $u$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{5}(x^3 + 1)$. Démontrer par récurrence que $u$ est décroissante. On admettra qu'on peut démontrer que $f$ est croissante.

**Initialisation** $u_0 \geqslant u_1$ : vrai puisque $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{2}{5}$

**Hérédité** Soit un indice $n$ tel que $u_n \geqslant u_{n+1}$.
En appliquant $f$ : $f(u_n) \geqslant f(u_{n+1})$, car $f$ est croissante. Donc $u_{n+1} \geqslant u_{n+2}$. Donc la propriété est héréditaire.

Donc, d'après le principe de récurrence, $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout $n$ et donc $u$ est décroissante.

**6.** $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2^n$. Démontrer par récurrence que $u$ est une suite géométrique.

$u_1 = 2$. Donc la raison de la suite ne peut être que $\dfrac{u_1}{u_0} = 2$.

Soit $P$ la propriété définie par $P(n) : u_{n+1} = 2u_n$.

**Initialisation** : $P(0)$ s'écrit $u_1 = 2u_0$. C'est vrai d'après le calcul précédent.

**Hérédité** : Soit $n$ un indice tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} = 2u_n$.
Calculons $u_{n+2}$ : $u_{n+2} = u_{n+1} + 2^{n+1} = \cdots = 2u_n + 2 \times 2^n = 2(u_n + 2^n) = 2u_{n+1}$.
Donc, pour le $n$ considéré, $P(n+1)$ est vraie, et $P$ est donc héréditaire.

Donc, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n$ : $u_{n+1} = 2u_n$, et donc $u$ est une suite géométrique (de raison 2).

**7.** $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1} = u_n + 2^{2n}$. Démontrer par récurrence que $u$ est une suite géométrique.

Même type d'exercice que le précédent, exemple d'une autre méthode.

D'après le calcul des premiers termes : $\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{16}{3}, \dfrac{64}{3}$, on conjecture que $u_n = \dfrac{4^n}{3}$, et on le démontre par récurrence.

**Initialisation** : $u_0 = \frac{1}{3} = \frac{4^0}{3}$.

**Hérédité** : pour un $n$ tel que $u_n = \frac{4^n}{3}$, on a $u_{n+1} = \frac{4^n}{3} + 2^{2n} = \cdots = 4^n(\frac{1}{3}+1) = \frac{4^{n+1}}{3}$. Donc la propriété est héréditaire.

Donc d'après le principe de récurrence, $u_n = \frac{4^n}{3}$ pour tout $n$, ce qui prouve que $u$ est une suite géométrique de raison 4 (forme $u_0 q^n$).

**8.** Pour $n \geqslant 2$, on appelle $s_n$ la somme des $n$ premiers nombres pairs à partir de 2. Montrer par récurrence que $s_n = n^2 + n$ pour tout $n \geqslant 2$.

Les premières valeurs de $s_n$ sont : $2+4=6, 2+4+6=12$ puis 20, 30, 42.

**Initialisation** : $P(2)$ s'écrit $s_2 = 2^2 + 2$. C'est vrai car $s_2 = 2+4$ par définition.

**Hérédité** : Soit $n$ un indice tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $s_n = n^2 + n$.
Calculons $s_{n+1}$ : $s_{n+1} = s_n +$ le $(n+1)$-ième nombre pair. Or le premier nombre pair $\geqslant 2$ est 2, le deuxième est $2\times 2$, le troisième $2\times 3$, le quatrième $2\times 4, \dots$, le $(n+1)$-ième est $2(n+1)$ .
Donc $s_{n+1} = s_n + 2(n+1) = n^2 + n + 2(n+1) = \cdots = (n+1)^2 + (n+1)$. Donc la propriété est héréditaire.

Donc d'après le principe de récurrence, $s_n = n^2 + n$ pour tout $n \geqslant 2$

**9.** $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$. Démontrer par récurrence que $u_n = n2^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

**Initialisation** : $u_1 = 1 \times 2^1$ : vrai car $u_1 = 2$.

**Hérédité** : Soit $n$ un indice tel que $u_n = n2^n$. calculons $u_{n+1}$ :
$u_{n+1} = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)n2^n = n2^{n+1} + 2^{n+1} = (n+1)2^{n+1}$. Donc la propriété est héréditaire.

Donc d'après le principe de récurrence, $u_n = n2^n$ pour tout $n \geqslant 1$

**10.** $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$. Démontrer par récurrence que $u_n \leqslant \frac{2}{n}$ pour tout $n \geqslant 3$.

**Initialisation** : $u_3 \leqslant \frac{2}{3}$ car $u_3 = \cdots = \frac{3}{8}$ .

**Hérédité** : Soit $n$ un indice tel que $u_n \leqslant \frac{2}{n}$. Comparons $u_{n+1}$ à $\frac{2}{n+1}$.

D'après la relation de récurrence $u_{n+1} - \frac{2}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$.

Or $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \cdots = \frac{-n^2+2n+1}{n^2(n+1)}$

On peut démontrer que, pour $n \geqslant 3$, on a $-n^2+2n+1 \leqslant 0$ (avec la règle du signe d'un trinôme, ou avec l'étude de la fonction $x \mapsto -x^2+2x+1$, ou avec la forme canonique $2-(n-1)^2$). Donc $u_{n+1} - \frac{2}{n+1} \leqslant 0$, ce qui prouve que la propriété est héréditaire.

Donc d'après le principe de récurrence, $u_n \leqslant \frac{2}{n}$ pour tout $n \geqslant 3$. (en fait, c'est vrai pour tout $n \geqslant 1$, car on le vérifie directement pour $u_1$ et $u_2$).

**11.** Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $(1+\sqrt{2})^n$ est de la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$, où $a_n$ et $b_n$ sont des nombres entiers.

**Initialisation** : Pour $n = 0$ : $(1+\sqrt{2})^n = 1 = 1 + 0\sqrt{2}$, qui est bien de la forme voulue, avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

**Hérédité** : Soit $n$ un nombre tel que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ avec $a_n$ et $b_n$ entiers.
Calculons $(1+\sqrt{2})^{n+1}$ : $(1+\sqrt{2})^{n+1} = (1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2}) = (a_n + b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = \cdots = (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2}$. Or $a_n + 2b_n$ et $a_n + b_n$ sont bien des nombres entiers puisque $a_n$ et $b_n$ le sont. Donc $(1+\sqrt{2})^{n+1}$ est bien de la forme voulue, ce qui prouve que la propriété est héréditaire.

Donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$, $(1+\sqrt{2})^n$ est de la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$, où $a_n$ et $b_n$ sont des nombres entiers.

# II Exercices tests

**1.** Soit $u$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 2}$ pour $n \geqslant 0$. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que $u$ est positive ou nulle et majorée par 2.

**2.** Dans l'exercice 11, on a montré que, pour tout $n$ entier $\geqslant 0$, il existe $a_n$ et $b_n$ entiers tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
Déterminer $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$. En déduire, en raisonnant par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$, on a $2^{n-1} \leqslant b_n \leqslant a_n \leqslant 3^n$