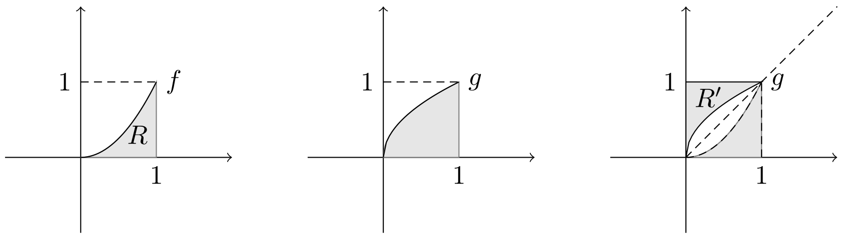
Calculs d'aires, encadrements

I) Calculs d'aires

1. Soit $f(x)=x^2$ et $g(x)=\sqrt{x}$. On note A l'aire de la région R du plan comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses sur $[0;1]$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x$ en fonction de A.



f et g sont deux fonctions réciproques l'une de l'autre, donc leurs courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y=x$. En effet, dire qu'un point $(a;b)$ est sur la courbe de f équivaut à dire que le point $(b;a)$ est sur la courbe de g (puisque, sur $[0;1]$, on a l'équivalence $b=a^2 \Leftrightarrow a=\sqrt{b}$).

Donc la région R' symétrique de R a aussi pour aire A, puisqu'une symétrie axiale conserve les aires. Cette région est délimitée par l'axe des ordonnées (symétrique de l'axe des abscisses), la courbe de g (symétrique de la courbe de f) et la droite horizontale d'équation $y=1$ (symétrique de la droite verticale d'équation $x=1$). Quel est le rapport entre cette région R' et l'intégrale demandée ? Si on lui ajoute la région de l'intégrale demandée, on obtient le carré construit sur $[0;1]$, carré dont on connaît l'aire 1.

Donc $\displaystyle\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x = 1-A$, soit $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x = 1-\int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x$

Thème : fonctions réciproques.

2. Mêmes notations f, g, A que dans l'exemple précédent. Quelle est l'aire de la région de plan comprise entre la courbe de f et celle de g sur $[0;1]$?

On procède par différence d'aires : l'aire cherchée est la différence de deux intégrales :

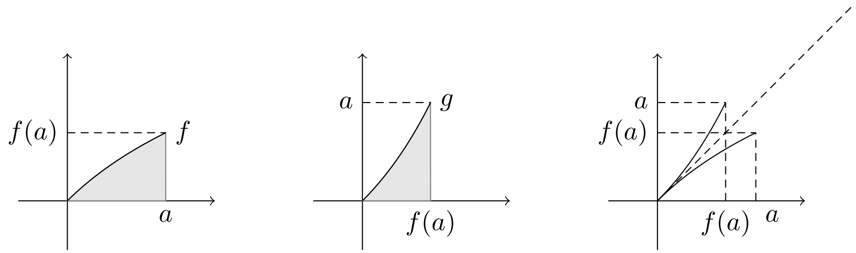
$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x = 1-2A$ d'après l'exemple précédent.

On aurait pu aussi appliquer la formule de l'aire d'une région comprise entre deux courbes : c'est l'intégrale de la différence $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}-x^2\ \mathrm{d}x$. C'est bien la même chose à cause du théorème de linéarité : l'intégrale d'une différence de deux fonctions est bien la différence des intégrales des deux fonctions (c'est une des rares propriétés de forme «machin du truc» vraies pour les intégrales).

3. Test

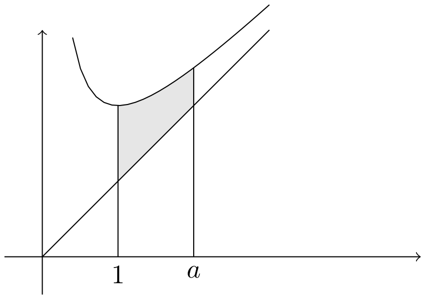
Soit $f(x)=\ln(x+1)$ et $g(x)=e^x-1$. Démontrer en utilisant l'idée des deux exemples précédents (fonctions réciproques, symétrie, aires) que

$\displaystyle\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x = af(a)-\int_0^{f(a)} g(x)\ \mathrm{d}x$ (bac 2005).



4. Soit $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. La courbe de f admet comme asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y=x$. Calculons l'aire de la région comprise entre cette asymptote et la courbe de f sur $[1;a]$ (avec $a>1$), puis la limite de cette aire lorsque a tend vers $+\infty$.

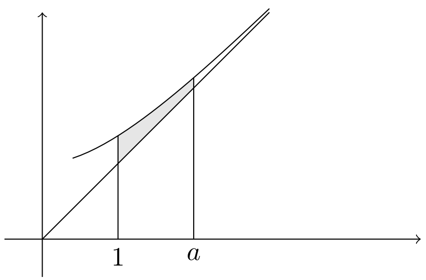
On admettra que $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ln(a)$



L'aire demandée est obtenue par différence : $\displaystyle\int_1^a f(x) - x \, \mathrm{d}x = \int_1^a \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln(a)$.

Sa limite lorsque a tend vers $+\infty$ est donc $+\infty$ (limite du logarithme). Ce résultat ne semble pas surprenant, mais voyez l'exemple suivant.

5. Soit $f(x) = x + e^{-x}$. La courbe de f admet comme asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x$. Calculons l'aire de la région comprise entre cette asymptote et la courbe de f sur $[1; a]$ (avec $a > 1$), puis la limite de cette aire lorsque a tend vers $+\infty$.
On admettra que $\displaystyle\int_1^a e^{-x} \, \mathrm{d}x = e^{-1} - e^{-a}$.



L'aire demandée est obtenue par différence :
$\displaystyle\int_1^a f(x) - x \, \mathrm{d}x = \int_1^a e^{-x} \, \mathrm{d}x = e^{-1} - e^{-a}$.
Sa limite lorsque a tend vers $+\infty$ est donc e^{-1} (d'après les limites de l'exponentielle). Cette fois, ce résultat semble surprenant. La région entre la courbe et son asymptote contient des distances aussi longues qu'on veut (puisque la courbe ne rejoint jamais son asymptote). On peut y parcourir des milliards de kilomètres en ligne droite, et pourtant son aire est finie (et même petite, inférieure à $\frac{1}{2}$). C'est comme un récipient ouvert sans fond, de profondeur illimitée, qui ne pourrait même pas contenir un demi-litre de liquide. Mais le cerveau humain ne peut pas se forger naturellement de telles images mentales : l'infini est en dehors de notre perception, surtout quand il est considéré comme un tout achevé.

Thème : aire entre une courbe et son asymptote.

6. Soit $f(x) = e^{1-x}$. On admettra que, pour tout a, $\displaystyle\int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x = e - e^{1-a}$.

Soit A_1 l'aire du domaine limité par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.
Soient les points $A(1; 0)$ et $B(1; 1)$, et T la tangente à la courbe de f au point B. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en C. Soit A_2 l'aire du triangle ABC.
Démontrer que $A_1 + 2A_2 = e$ (bac 1999).

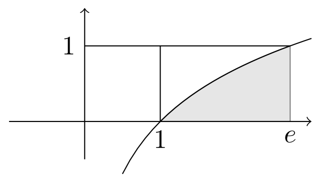
L'énoncé initial était plus général, avec $A(x_0; 0)$ *et* $B(x_0; f(x_0))$.

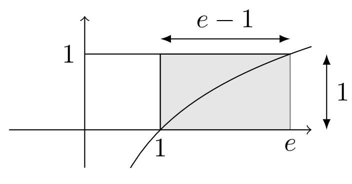
II) Encadrements d'intégrales

Le théorème principal est le «théorème d'intégration d'une inégalité» : à partir d'une inégalité entre deux fonctions, on déduit une inégalité entre deux intégrales (sous certaines conditions).
Une conséquence particulière de ce théorème est *l'inégalité de la moyenne*, qui s'applique lorsque les fonctions encadrantes sont des *constantes*.
Il faut penser à ces théorèmes chaque fois qu'on demande de démontrer une inégalité concernant des intégrales.
Attention, piège : bien vérifier que $a \leqslant b$ (sinon l'ordre est renversé).

1) Divers

1. Encadrer $\displaystyle\int_1^e \ln(x) \, \mathrm{d}x$ par des constantes.

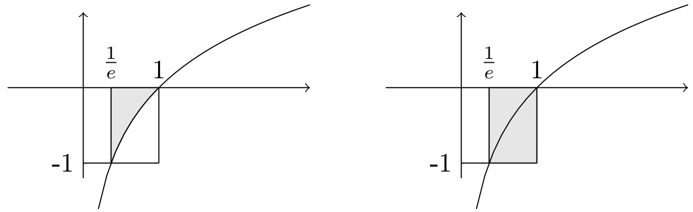




Puisque $0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1$ pour $1 \leqslant x \leqslant e$, on a : $\displaystyle\int_1^e 0 \, \mathrm{d}x \leqslant \int_1^e \ln(x) \, \mathrm{d}x \leqslant \int_1^e 1 \, \mathrm{d}x$, soit

$0 \leqslant \displaystyle\int_1^e \ln(x) \, \mathrm{d}x \leqslant (e - 1) \times 1$

2. Encadrer $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln(x) \, \mathrm{d}x$



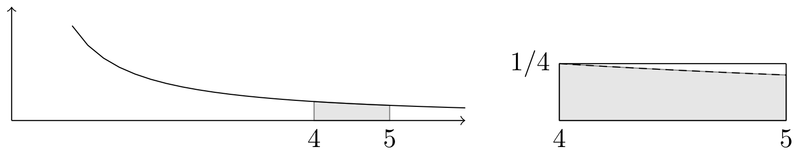
Puisque $-1 \leqslant \ln(x) \leqslant 0$ pour $\frac{1}{e} \leqslant x \leqslant 1$,

on a : $\int_{\frac{1}{e}}^{1} -1 \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln(x) \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{1}{e}}^{1} 0 \,\mathrm{d}x$, soit

$\left(1 - \frac{1}{e}\right) \times (-1) \leqslant \int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln(x) \,\mathrm{d}x \leqslant 0$

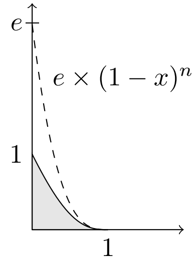
Attention, puisque la fonction est négative avec $\frac{1}{e} \leqslant 1$, l'intégrale n'est pas égale à l'aire, mais à l'opposée de l'aire.

3. On peut démontrer que $\int_a^b \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln(b) - \ln(a)$ (pour $a > 0$ et $b > 0$).
En déduire, sans calculatrice, l'inégalité : $\ln\left(\frac{5}{4}\right) \leqslant \frac{1}{4}$



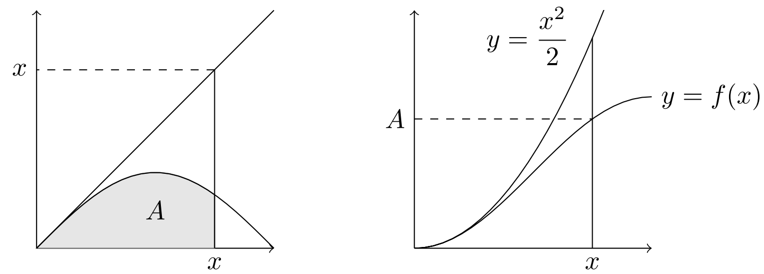
Le logarithme d'un quotient est la différence des logarithmes. Cela suggère d'appliquer la propriété avec $b = 5$ et $a = 4$. On est donc ramené au problème équivalent : montrer que $\int_4^5 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}$. Quand une question demande de démontrer une inégalité concernant une intégrale, il est naturel de penser au théorème d'intégration d'une inégalité. Pour pouvoir l'appliquer, il faut partir d'une inégalité sans intégrale concernant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
On essaye donc d'encadrer cette fonction sur $[4; 5]$. C'est une fonction décroissante, donc pour $4 \leqslant x \leqslant 5$, on a : $\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{4}$. On intègre la deuxième inégalité de 4 à 5 (justifications : les fonctions sont continues et $4 \leqslant 5$) :
$\int_4^5 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_4^5 \frac{1}{4} \,\mathrm{d}x$ soit $\ln\left(\frac{5}{4}\right) \leqslant \frac{1}{4}$ (le deuxième membre est l'aire d'un rectangle de base 1 et de hauteur $\frac{1}{4}$).

4. On peut démontrer que $\int_0^a (1-x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1-(1-a)^{n+1}}{n+1}$ (pour $0 \leqslant a \leqslant 1$).
En utilisant le même genre d'idée que dans l'exemple précédent, en déduire que $\int_0^1 (1-x)^n e^x \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{e}{n+1}$ (bac 2005).



L'idée nouvelle ici est qu'on cherche une majoration de $(1-x)^n e^x$ par une fonction de x, pas par une constante. Utiliser aussi la linéarité pour «sortir le coefficient e».
L'exercice se prolonge par la recherche de la limite de l'intégrale lorsque n tend vers $+\infty$ avec le théorème des gendarmes.

5. Attention, difficultés : changement de nom de la variable d'intégration, borne d'intégration variable.
On admettra que, pour tout $0 \leqslant x \leqslant \pi$, on a $0 \leqslant \sin(x) \leqslant x$ (ce qu'on peut démontrer par l'étude de la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$).
On appelle $f(x)$ l'aire sous la courbe de la fonction sinus entre 0 et x (pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$). Déterminer une majoration de $f(x)$ par un polynôme du second degré.

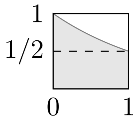


L'idée est d'intégrer l'inégalité $\sin(x) \leqslant x$. Mais on voudrait l'intégrer de 0 à x. Il y a donc deux utilisations différentes de la lettre x. Il faut alors réécrire l'inégalité avec une autre lettre t, qu'on prendra comme variable d'intégration, et on intégrera de 0 à x (on fixe x, et c'est t qui varie de 0 à x).
Donc on part de l'inégalité $\sin(t) \leqslant t$ et on l'intègre de 0 à x (justifications : les fonctions sont continues, les bornes sont dans le bon ordre $0 \leqslant x$, et l'inégalité est bien vérifiée pour tout t dans $[0; x]$).

On obtient : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \sin(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t\ \mathrm{d}t$, soit $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.
Justifications : puisque $\sin(t) \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, l'aire $f(x)$ est bien égale à l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\ \mathrm{d}t$, et pour calculer $\displaystyle\int_0^x t\ \mathrm{d}t$ on utilise la formule de l'aire d'un triangle.

2) Avec 2^{-x} et des suites (*méthode des rectangles*)

6. Soit $f : x \mapsto 2^{-x}$. Encadrer $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$

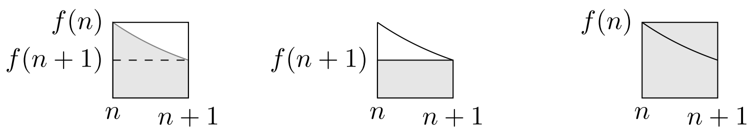


La fonction $f : x \mapsto 2^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $2^{-1} \leqslant f(x) \leqslant 2^0$, soit $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Donc on peut encadrer $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$ (inégalité de a moyenne) :

$\dfrac{1}{2}(1-0) \leqslant I \leqslant 1 \times (1-0)$, soit $\dfrac{1}{2} \leqslant I \leqslant 1$

7. Soit n un entier naturel et $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} 2^{-x}\ \mathrm{d}x$. Encadrer I_n et en déduire la limite de la suite I_n.

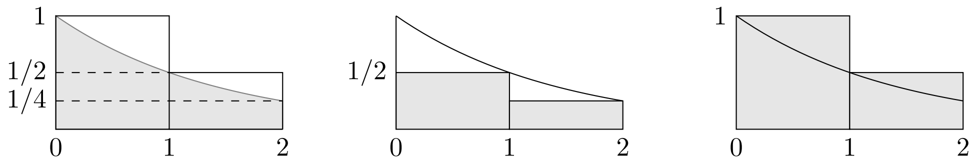


La fonction $f : x \mapsto 2^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc, pour $n \leqslant x \leqslant n+1$, on a $2^{-(n+1)} \leqslant f(x) \leqslant 2^{-n}$.
Donc, par le théorème d'encadrement d'une intégrale :
$2^{-(n+1)}(n+1-n) \leqslant I_n \leqslant 2^{-n}(n+1-n)$, soit $\dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
Les deux suites qui encadrent I_n ont pour limite 0 (propriétés des suites géométriques), donc d'après le théorème des gendarmes la limite de I_n est 0.

8. Encadrer $I = \displaystyle\int_0^2 2^{-x}\ \mathrm{d}x$ à moins d'une unité près.

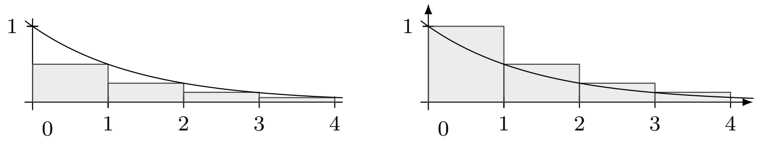
Si on utilise les idées précédentes, à partir de $2^{-2} \leqslant 2^{-x} \leqslant 2^{-0}$, on obtiendrait $\dfrac{1}{2} \leqslant I \leqslant 2$. Mais l'amplitude de l'encadrement serait $\dfrac{3}{2}$, ce qui est trop grand.

L'idée est de fractionner l'intervalle $[0;2]$ en deux : $[0;1]$ et $[1;2]$, et d'utiliser la relation de Chasles : $I = I_0 + I_1$ (avec les notations de l'exemple précédent).



On encadre séparément chaque intégrale et on fait la somme :
$\dfrac{1}{2} \leqslant I_0 \leqslant 1$ et $\dfrac{1}{4} \leqslant I_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{3}{4} \leqslant I_0 + I_1 \leqslant \dfrac{3}{2}$.
Cette fois l'amplitude de l'encadrement est $\dfrac{3}{4}$, ce qui convient.

9. Encadrer $I = \displaystyle\int_0^{2009} 2^{-x}\ \mathrm{d}x$ à moins d'une unité près.



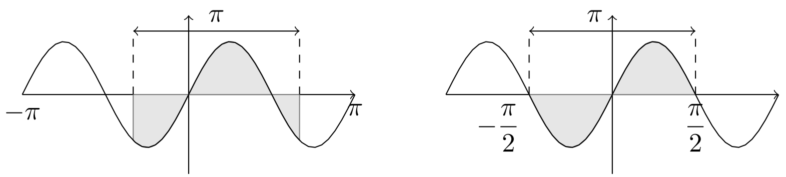
Même méthode que précédemment, avec $I = I_0 + I_1 + \dots I_{2008}$ (attention au décalage d'indice, qui vient de ce que le dernier intervalle est $[2008; 2009]$).
$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{2^{2009}} \leqslant I \leqslant \dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dots + \dfrac{1}{2^{2008}}$.
L'amplitude de l'encadrement est $1 - \dfrac{1}{2^{2009}}$, ce qui convient.
L'encadrement peut être simplifié grâce à la formule de la somme des termes d'une suite géométrique (à ne jamais oublier) :
$1 - \dfrac{1}{2^{2009}} \leqslant I \leqslant 2\left(1 - \dfrac{1}{2^{2009}}\right)$, soit en gros $1 \leqslant I \leqslant 2$ (*calculs à vérifier*).

III) Utilisation des règles de calcul

1. On admet que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x))^2\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi}{8}$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(x))^2\ \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi}{8}$.
Utiliser $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et la linéarité.
Thème : calculs indirects d'intégrales par résolution d'un système provenant de sommes et de de différences, en utilisant la linéarité.

2. Calculer $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin(2x)\ \mathrm{d}x$.



La fonction $f : x \mapsto \sin 2x$ est périodique de période π (car $f(x+\pi) = \sin(2x+2\pi) = f(x)$).
Or l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ a pour amplitude π. Donc l'intégrale a la même valeur que sur tout autre intervalle d'amplitude π, par exemple :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\ \mathrm{d}x.$$

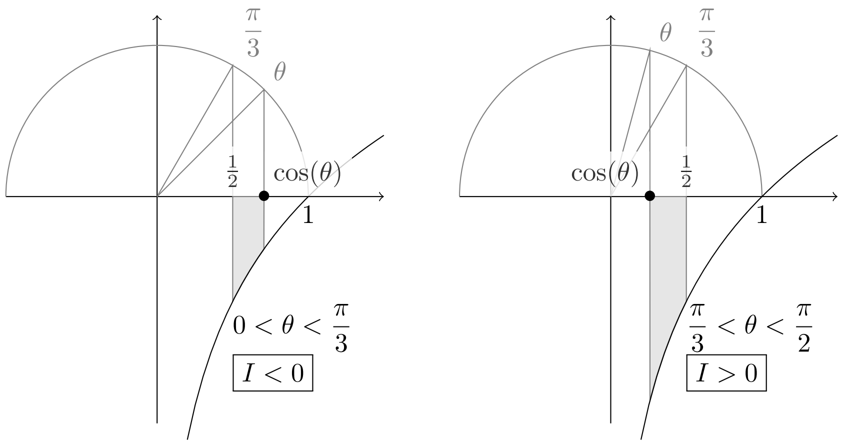
Or f est impaire et les deux bornes sont opposées, donc $I = 0$.

On a combiné deux propriétés : périodicité, fonction impaire.

3. Signe d'une intégrale. *Attention : pièges*

Soit θ un réel dans $[0; \pi]$. Quel est le signe de $I = \displaystyle\int_{1/2}^{\cos(\theta)} \ln(x)\ \mathrm{d}x$?

Ouh là ! intégrale, cosinus, logarithme, x, θ ...



Première vérification impérative : est-ce que la fonction à intégrer est bien définie et continue entre les bornes d'intégration ? Seulement si l'intervalle est inclus dans $]0; +\infty[$ (logarithme). Ce n'est le cas que si $\cos(\theta) > 0$, soit $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Ensuite, il y a deux questions à se poser : quel est le signe de la fonction à intégrer (sur l'intervalle d'intégration) et quel est l'ordre des bornes ?

Les bornes sont toutes les deux $\leqslant 1$. Or pour $x \leqslant 1$, on a $\ln(x) \leqslant 0$. Donc, pour tout θ, la fonction à intégrer est négative.

Ensuite, il faut savoir dans quel ordre sont rangés $\dfrac{1}{2}$ et $\cos(\theta)$. En s'aidant du cercle trigonométrique, on trouve finalement :
si $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{3}$, $I \leqslant 0$ et si $\dfrac{\pi}{3} \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $I \geqslant 0$.

Remarque sur le statut des notations x et θ : sur le dessin, on voit θ, mais pas x. C'est normal, parce que x n'est qu'une lettre « muette ». C'est juste une marque syntaxique pour définir l'intégrale. On aurait d'ailleurs pu exprimer cette intégrale sans utiliser la lettre x : « l'intégrale de $\dfrac{1}{2}$ à $\cos(\theta)$ de la fonction ln »

A la rigueur, on peut dire que x prend comme valeurs les abscisses de tous les points dessinés en gris dans la région étudiée. Dire « tous » les points explique un peu l'usage du mot « intégrale » : l'intégrale tient compte *intégralement* de tous ces points.