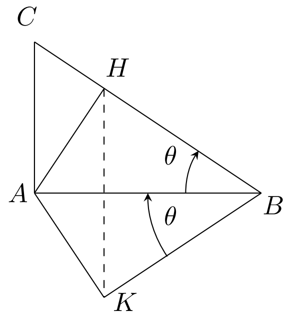
Exemples : similitudes directes

I) Exercices

1. Soit ABC un triangle rectangle en A, direct. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) et K le symétrique de H par rapport à (AB). Démontrez qu'il existe une similitude directe transformant (A, K, B) en (C, A, B) (dans cet ordre).

Remarque : l'énoncé demande de démontrer une existence, il ne demande pas forcément de déterminer exactement la similitude.



Les triangles ABC et ABH ont des angles géométriques égaux (angle en B commun, et angles droits en H et en A). Mais ses angles orientés sont les opposés de ceux de ABC puisque ABC est direct alors que HBA est indirect.

Par symétrie, le triangle HBA est transformé en KBA, qui a donc les mêmes angles géométriques que HBA, mais des angles orientés opposés. Donc finalement KBA a les mêmes angles orientés que ABC. Donc les deux triangles sont directement semblables.

On sait qu'alors les rapports des côtés sont égaux : $\dfrac{BC}{BA} = \dfrac{BA}{BK} = k$ (propriété des triangles semblables). Il existe donc un angle orienté constant θ et un rapport k constant tel que

$BC = kBA$ et $BA = kBK$, et $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BA}\right) = \theta$

Donc la similitude directe de centre B, de rapport k et d'angle θ transforme bien (A, K, B) en (C, A, B)

2. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ d'affixe $1+i$ et r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ Déterminer la forme réduite de la transformation $f = t \circ r$.

Le dessin montre la construction avec $M_1 = r(M)$ et $M' = t(M_1)$.

La formule de $t \circ r$ est $f(z) = e^{i\pi/4}z + 1 + i$.

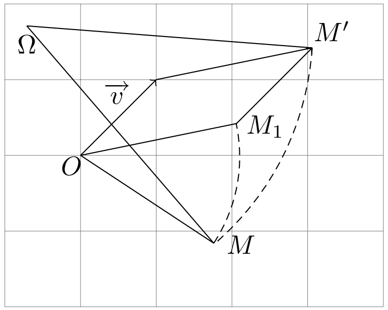
On calcule le point invariant en résolvant $f(z) = z$.

On trouve un point invariant unique Ω d'affixe $\omega = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

f est la composée de deux similitudes directes, donc c'est une similitude directe. Elle a un point invariant unique, donc ce n'est pas une translation. Elle a un rapport égal à 1 (produit des rapports 1×1) et un angle $\dfrac{\pi}{4}$ (somme des angles $0 + \dfrac{\pi}{4}$), donc c'est la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

On vérifie que f peut se mettre sous la forme : $f(z) = e^{i\pi/4}(z - \omega) + \omega$.

C'est bien la formule d'une rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$, ce qui est vérifié sur la figure.



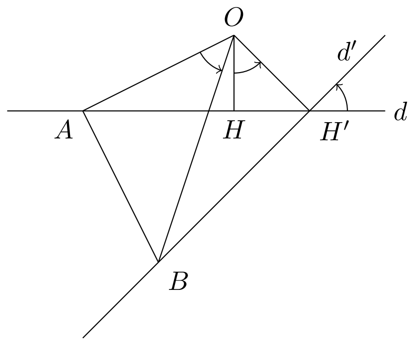
3. Soit une droite d et un point O n'appartenant pas à d. On considère les triangles OAB directs rectangles en A et isocèles dont le sommet A de l'angle droit est un point variable de d .

Déterminer le lieu géométrique des points B lorsque A décrit la droite d.

Le point B est l'image de A par la similitude directe s de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ (d'après les propriétés d'un triangle rectangle isocèle).

Comme le point A décrit la droite d, le point B décrit la droite image de d par s. On sait d'après un théorème que c'est une droite d' faisant un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ avec d.

Comment construire précisément d' ? Il suffit de déterminer le transformé d'un point particulier, par exemple du point H projeté orthogonal de O sur d. On construit donc OHH' isocèle rectangle en H, direct. Il suffit ensuite de tracer la transformée de d par la rotation de centre H' et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.



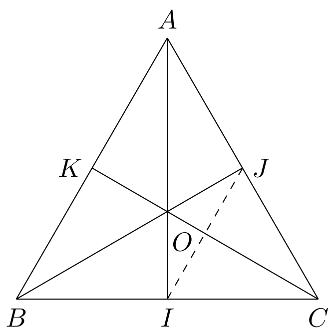
4. Soit un triangle ABC équilatéral direct de centre O. Soient I, J, K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Quels sont les éléments géométriques de la similitude directe qui transforme B en I et O en J ?

Remarque : puisque $B \neq O$ et $I \neq J$, un théorème du cours permet d'affirmer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme B en I et O en J .

Son rapport est $\dfrac{IJ}{BO} = \cdots = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ En effet, si le côté du triangle est a,

$IJ = \dfrac{a}{2}$ (Thalès, droite des milieux) et

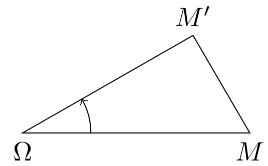
$BO = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ (la hauteur BJ vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ et O est aux deux-tiers de $[BJ]$).



L'angle de la similitude est $\left(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{IJ}\right) = \left(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ (bissectrice).

• *Recherche du centre*

Pour trouver le centre Ω, il est maintenant utile de visualiser la forme du *triangle de similitude* $\Omega MM'$:



Il faut reconnaître ce genre de triangle : c'est un classique demi-triangle équilatéral, à cause de son angle $\dfrac{\pi}{6}$ et de son rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

C'est un triangle rectangle en M', et l'angle en M vaut $\dfrac{\pi}{3}$. Tout cela peut se démontrer avec les complexes : prouver par exemple que $\omega - m' = -i\sqrt{3}(m - m')$.

Il faut maintenant chercher sur la figure un triangle de cette forme avec $M = B$ et $M' = I$ et un autre avec $M = O$ et $M' = J$. D'après la forme du triangle, Ω doit être sur la perpendiculaire en I à (BI) , et aussi sur la demi-droite image de $[BC)$ par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, c'est-à-dire la demi-droite $[BA)$. Donc le centre semble bien être le point A (on ne l'a pas vraiment démontré).

• *Rédaction*

La démonstration consiste seulement à vérifier que le point A satisfait les conditions d'une similitude : a-t-on $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{AJ}{AO} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right) = \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AJ}\right) = \dfrac{\pi}{6}$?

Oui à cause des propriétés d'un triangle équilatéral (longueur de la hauteur, position du centre, bissectrices).

Donc la réponse est : $\boxed{\text{centre } A\text{, rapport } \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{, angle } \dfrac{\pi}{6}}$

Autre méthode : nombres complexes

La similitude cherchée a pour formule $z' = \alpha z + \beta$. En écrivant les conditions, on trouve α et β en résolvant un système de deux équations. On trouve :

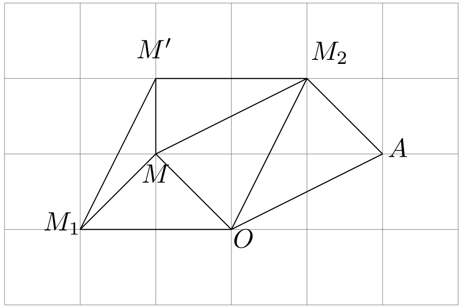
$\alpha = \dfrac{z_J - z_I}{z_B - z_O}$, puis $\beta = z_I - \alpha z_B$.

On peut ensuite tout exprimer en fonction de deux affixes seulement, z_A et z_B par exemple. On peut même choisir une des affixes $z_A = 0$ (choix adapté puisqu'on conjecture que le centre est A).

$z_C = e^{i\pi/3} z_B$, $z_O = \dfrac{1}{3}(z_B + z_C)$, $z_I = \dfrac{1}{2}(z_B + z_C)$, $z_J = \dfrac{1}{2} z_C$.

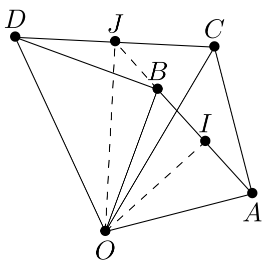
On vérifie alors que A est bien invariant : $\beta = 0$, on calcule $|\alpha| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\arg(\alpha) = \dfrac{\pi}{6}$.
En fait $\alpha = \dfrac{3}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, donc la similitude s'écrit $z' = \left(\dfrac{3}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) z$ (c'est celle du contrôle commun de janvier 2009).

5. Soit A d'affixe $2 + i$. Pour tout M, on effectue la construction suivante : OMM_1 est rectangle en M, isocèle direct, $MOAM_2$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$. Démontrer que la transformation $M \mapsto M'$ est une similitude et déterminer ses éléments géométriques.
Solution : on peut démontrer que la formule est $z' = (2 + i)z + 2 + i$, le centre a pour affixe $\omega = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i$, le rapport est $\sqrt{5}$ et l'angle est θ avec $\cos(\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ($\theta \approx 0,464$ rad).



II) Problème : triangles isocèles rectangles, milieux, alignement

Soit OAB un triangle isocèle ($OA = OB$). On construit les triangles isocèles rectangles directs OAC (rectangle en A) et OBD (rectangle en B).
On appelle I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$



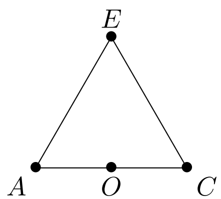
1. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en C. Quel est son angle et quel est son rapport ?
Angle : $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. Rapport : $\dfrac{OC}{OA} = \sqrt{2}$

2. Démontrer que la formule complexe de s est : $z' = (1 + i)z$.
En déduire que, pour tout M, OMM' est toujours isocèle rectangle direct ($M' = s(M)$)
La formule est $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$, soit $z' - 0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}(z - 0) = \cdots = (1 + i)z$
D'après la figure (avec $M = A$ et $M' = C$) le triangle serait rectangle en M.
il faut prouver $0 - z = i(z' - z)$ (rotation de centre M transformant M' en O).
$z' - z = (1 + i)z - z = iz$, donc $i(z' - z) = i^2 z = -z$, ce qui est bien ce qu'on veut.

3. Quelles sont les images par s de B et de I (expliquer) ?
En déduire que A, I et J sont alignés.
$s(B) = D$ car OBD est isocèle rectangle direct en B, et d'autre part $s(I) = J$, car une similitude conserve le concept de milieu (s transforme $[AB]$ en $[CD]$, donc le milieu I en le milieu J).
On va montrer que (AB) et (IJ) sont toutes deux perpendiculaires à (OI) :
$(OI) \perp (AB)$ car $[OI]$ est médiane dans OAB isocèle, donc aussi hauteur.
$(OI) \perp (IJ)$ puisque J est l'image de I par s, donc OIJ est isocèle rectangle en I.
Donc (AB) et (IJ) sont parallèles, et donc confondues puisque $I \in (AB)$.

III) Problème : triangle équilatéral, similitude réciproque, cercle

On appelle A le point d'affixe -1 et C le point d'affixe 1.
Soit E le point tel que ACE soit un triangle équilatéral direct (on pourra calculer l'affixe de E mais ce n'est pas indispensable).

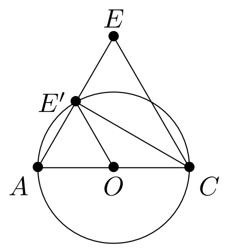


1. Soit σ (*sigma*) la similitude directe définie par $z \mapsto z' = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{4}z + \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{4}$
Déterminer les éléments géométriques qui définissent σ
Le rapport est $k = |a| = \left|\dfrac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right| = \cdots = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

L'angle est $\arg(a)$ avec pour cosinus $\dfrac{x_a}{|a|} = \dots = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et pour sinus $\dfrac{y_a}{|a|} = \dots = \dfrac{1}{2}$. Donc l'angle de la similitude est $\arg(a) = \dfrac{\pi}{6}$

Le centre est le point invariant : $\omega = \dfrac{b}{1-a} = \dots = 1$. C'est donc C.

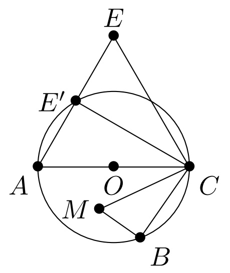
2. Montrer que l'image E' de E par σ est le milieu de $[AE]$. (on pourra montrer que l'affixe de E' est $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ mais ce n'est pas indispensable)
Montrer que E' est sur le cercle trigonométrique (centre O, rayon 1).



Dans le triangle équilatéral AEC, $[CE']$ est médiane et donc bissectrice, donc $\left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CE'}\right) = \dfrac{\pi}{6}$. De plus $[CE']$ est une hauteur donc $\dfrac{CE'}{CE} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Donc $E' = \sigma(E)$ (les conditions avec centre, rapport et angle sont vérifiées).

$OE' = \dfrac{1}{2}CE$ (Thalès), donc $OE' = 1$, donc E' est sur le cercle trigonométrique.

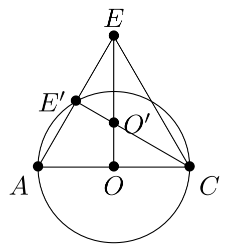
3. Soit B un point quelconque du cercle trigonométrique. On appelle M l'image de B par la similitude réciproque de σ (on appelle s cette réciproque).
Le but de cette question est de déterminer l'ensemble Γ (*Gamma*) des points M lorsque B parcourt le cercle trigonométrique.



a) Démontrer que le point E appartient à l'ensemble Γ

$\sigma(E) = E'$, donc $s(E') = E$. Or E est sur le cercle : c'est une position particulière du point B, donc E appartient à Γ.

b) Soit O' l'image de O par s. Démontrer que O' est le centre de gravité de ACE



Soit G le centre de gravité. G est aux deux-tiers de la médiane $[CE']$ et la longueur de la médiane est $CE' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AC = \sqrt{3}$.

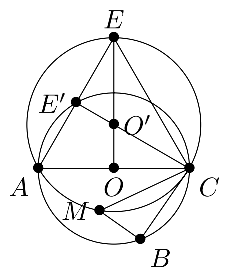
Donc $\dfrac{CG}{CO} = \dfrac{2}{3} \times \sqrt{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. C'est bien le rapport de s.

D'autre part $\left(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CG}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$. C'est bien l'angle de s.

Donc G est bien égal à $s(O) = O'$ (les conditions avec centre, rapport et angle sont vérifiées).

On pouvait aussi calculer les affixes : $E(\sqrt{3}i), O'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}i\right), E'\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

c) En déduire l'ensemble Γ. Par quels points particuliers de la figure passe-t-il ?



L'image du cercle de centre O et de rayon 1 par la similtude s est le cercle de centre $s(O) = O'$ et de rayon $1 \times \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

D'après la question 3.a, ce cercle passe par E, et comme le triangle AEC est équilatéral avec O' comme centre de gravité, il passe aussi par A et C.