Factoriser

I) En trouvant un facteur commun

1. Distributivité à l'envers
$ab + ac = a(b + c)$
$ab - ac = a(b - c)$

2. Carré : $x^2 = x \times x$
Exemple d'application : $x^2 + 3x = x(x + 3)$

3. Cube $x^3 = x^2 \times x$
Exemples d'application : $x^3 + 5x^2 = x^2(x + 5)$, $\quad 2x - x^3 = x(2 - x^2)$

4. les nombres 1 et -1
$a = 1 \times a$ et $-a = (-1) \times a$
Exemples d'application :
$x(3x - 5) + x = x(3x - 5 + 1) = x(3x - 4)$
$x(x - 3) - x = x(x - 3 - 1) = x(x - 4)$

5. Opposé de $a - b$
L'opposé de $a - b$ est $b - a$, donc $b - a = -(a - b) = (-1) \times (a - b)$
Par exemple : $x(x - 1) + 3(1 - x) = x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3)$

6. Factoriser d'abord localement pour faire apparaître un facteur commun
Exemple : $(x + 2)(3x - 1) + (3 - x)(2x + 4)$
On ne voit pas directement de facteur commun à toute l'expression. On cherche alors d'abord seulement localement :
$x + 2$? On ne voit rien. $\quad 3x - 1$? On ne voit rien. $\quad 3 - x$? On ne voit rien.
$2x + 4$? On repère 2 en facteur car $4 = 2 \times 2$. Donc $2x + 4 = 2(x + 2)$
Donc $(x + 2)(3x - 1) + (3 - x)(2x + 4) = (x + 2)(3x - 1) + (3 - x)(2 \times (x + 2)) = (x + 2)(3x - 1 + (3 - x) \times 2) = (x + 2)(3x - 1 + 6 - 2x) = (x + 2)(x + 5)$

II) Avec les identités remarquables

1. Différence de deux carrés : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

2. Le nombre 1 est un carré
$1^2 = 1$, donc quand on voit 1, on peut si c'est utile le remplacer par 1^2
Exemple : $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x + 1)(x - 1)$
Plus généralement, il faut reconnaître les premiers carrés : quand on voit 4, on peut le remplacer par 2^2, quand on voit 9, on peut le remplacer par par 3^2, etc.

3. Racine carrée
Tout nombre positif peut être considéré comme le carré de sa racine carrée :
si $a > 0$, alors $a = (\sqrt{a})^2$
Exemple : $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

4. $a^2b^2 = (ab)^2$
Par exemple $9x^2 = 3^2x^2 = (3x)^2$
Cela permet ensuite d'appliquer l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
Par exemple $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3)(2x - 3)$
Autre exemple : $3x^2 - 1 = (\sqrt{3})^2x^2 - 1^2 = (\sqrt{3} \times x)^2 - 1^2 = (\sqrt{3}\,x + 1)(\sqrt{3}\,x - 1)$

5. $\dfrac{1}{a^2} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^2$ Cela permet de reconnaître certains carrés pour appliquer par exemple $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.
Exemple : $x^2 - \dfrac{1}{9} = x^2 - \dfrac{1}{3^2} = x^2 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \left(x + \dfrac{1}{3}\right)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

6. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ et $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
Par exemple $x^2 + 4x + 4$:
On reconnaît d'abord un carré : x^2. Donc on va essayer une forme $(x + \dots)^2$
Le double produit serait de la forme $2 \times x \;\times \dots$. Cela pourrait correspondre à $4x$, qui est $2 \times x \times 2$. On choisirait alors $a = x$ et $b = 2$. Mais il faut vérifier que ce choix convient bien pour le dernier terme : $b^2 = 2^2 = 4$, ce qui correspond bien.
Donc $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

7. Factoriser par un nombre avant d'appliquer une identité remarquable
Exemple : $2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)^2$
Autre méthode : on reconnaît que $2 = (\sqrt{2})^2$, $4 = 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$, donc on peut appliquer l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avec $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$
On obtient $2x^2 + 4x + 2 = (\sqrt{2}\,x + \sqrt{2})^2$