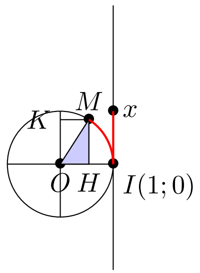
Fonctions cosinus et sinus

I) Cosinus et sinus d'un nombre réel

On sait déjà définir le cosinus et le sinus d'un angle aigu en utilisant un triangle rectangle. On va définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel x, en utilisant la correspondance entre ce nombre x et un point M du cercle trigonométrique



$\cos(x)$ est l'abscisse de M

$\sin(x)$ est l'ordonnée de M

La définition est cohérente avec les angles, quand $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$:

$\cos(x)$ est le cosinus de l'angle $\widehat{IOM}$, c'est-à-dire $\dfrac{OH}{OM} = OH = x_M$ puisque $OM = 1$ et $x_M > 0$

$\sin(x)$ est le sinus de l'angle $\widehat{IOM}$, c'est-à-dire $\dfrac{HM}{OM} = HM = OK = y_M$ puisque $OM = 1$ et $y_M > 0$

On dit que x est une mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$

1. Exercice résolu :
Représenter sur le cercle trigonométrique le point M qui correspond à $\dfrac{\pi}{3}$.
Quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{IOM}$? Quelle est sa mesure en radians ?
En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Comme π correspond à un demi-tour, c'est-à-dire un angle de 180°, $\dfrac{\pi}{3}$ correspond à $\dfrac{180}{3} = 60^\circ$. Le triangle IOA est équilatéral, donc H est e milieu de $[OI]$

Donc $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}}$.

Avec le théorème de Pythagore : $HM = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\boxed{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

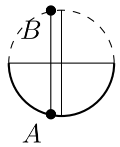
2. Même question avec $\dfrac{\pi}{6}$

3. Même question avec $\dfrac{\pi}{4}$

II) Règles de calcul

- Pour tout nombre réel x, $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont compris entre -1 et 1 :
$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
- La somme de leurs carrés est égale à 1 : $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$,
ce qui s'écrit en abrégé : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- Lorsqu'on ajoute 2π à x, le cosinus et le sinus reprennent les mêmes valeurs :
$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- Lorsqu'on change x en son opposé $-x$, le cosinus ne change pas, et le sinus devient l'opposé :
$\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$

1. Exercice résolu : x désigne un nombre réel de l'intervalle $[-\pi : 0]$ tel que $\cos(x) = -\dfrac{1}{5}$. Représenter le point associé à x sur le cercle trigonométrique.
Calculer la valeur exacte de $\sin(x)$



On trace la droite verticale d'abscisse $-\dfrac{1}{5}$. Elle coupe le cercle en deux points A et B. Mais on sait que $x \in [-\pi : 0]$, ce qui correspond au demi-cercle inférieur. Donc le point associé à x est le point A.

Ses coordonnées sont $(x_A; y_A) = (\cos(x); \sin(x))$. Or on sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, c'est-à-dire $x_A^2 + y_A^2 = 1$, c'est-à-dire $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 + y_A^2 = 1$.

$y_A^2 = 1 - \dfrac{1}{25} = \dfrac{24}{25}$. Donc $y_A = \sqrt{\dfrac{24}{25}}$ ou $-\sqrt{\dfrac{24}{25}}$. Or $y_A < 0$, donc $\boxed{\sin(x) = -\sqrt{\dfrac{24}{25}}}$

2. x désigne un nombre réel de l'intervalle $[0; \pi]$ tel que $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Représenter le point associé à x sur le cercle trigonométrique.
Calculer la valeur exacte de $\sin(x)$

3. Calculer $\sin\left(\dfrac{14\pi}{6}\right)$